

Solución al problema del Boletín 2011-3

SOCIEDAD ECUATORIANA DE MATEMÁTICA

EL PROBLEMA

Estamos en el año 2015 y se ha iniciado la colonización de Marte. Una de las primeras tareas que los colonos deben resolver concierne la organización del tiempo, específicamente la creación de un calendario marciano. Un año en marte dura 669 días marcianos y lo colonos, inspirados en sus tradiciones terrícolas, han decidido que pueden haber meses sólo de 28, de 30 y de 31 días. ¿Cuántos meses puede tener un calendario marciano?

SOLUCIÓN

Llamemos n_1 la cantidad de meses de 28 días, n_2 la cantidad de meses de 30 días y n_3 la cantidad de meses de 31 días presentes en el calendario. Notar que la suma

$$n_1 + n_2 + n_3$$

es la cantidad total de meses en el calendario. Por otra parte, como un año marciano tiene 669 días, debe cumplirse que:

$$28n_1 + 30n_2 + 31n_3 = 669. \quad (1)$$

Vamos a manipular esta ecuación algebraicamente para demostrar que la cantidad de meses del calendario tiene que estar dentro de un cierto rango de valores.

En primer lugar, si dividimos ambos lados de la ecuación para 28, obtenemos:

$$n_1 + \frac{30}{28}n_2 + \frac{31}{28}n_3 = \frac{669}{28}.$$

Pero $\frac{30}{28}$ es mayor que la unidad y n_2 es un entero no negativo, por lo que podemos concluir que $\frac{30}{28}n_2$ es mayor o igual a n_2 . Con el mismo razonamiento, $\frac{31}{28}n_3$ es mayor o igual a n_3 y obtenemos así la siguiente cadena de desigualdades:

$$n_1 + n_2 + n_3 \leq n_1 + \frac{30}{28}n_2 + \frac{31}{28}n_3 = \frac{669}{28} < 24.$$

Es decir, la cantidad de meses en el calendario debe ser estrictamente inferior a 24, de donde concluimos que a lo sumo pueden haber 23 meses.

Por otra parte, si dividimos la ecuación (1) para 31, obtenemos la expresión:

$$\frac{28}{31}n_1 + \frac{30}{31}n_2 + n_3 = \frac{669}{31},$$

y observando nuevamente que $\frac{28}{31}n_1 \leq n_1$ y $\frac{30}{31}n_2 \leq n_2$, llegamos a la cadena de desigualdades:

$$n_1 + n_2 + n_3 \geq \frac{28}{31}n_1 + \frac{30}{31}n_2 + n_3 = \frac{669}{31} > 21.$$

De aquí concluimos que el año en nuestro calendario marciano debe tener más de 21 meses, es decir, por lo menos 22 meses.

Juntado los dos argumentos anteriores, hemos demostrado que un año marciano debe forzosamente tener entre 22 y 23 meses. Construyendo algunos calendarios “al tanteo”, podemos verificar que ambas alternativas son posibles. La siguiente tabla muestra dos ejemplos:

n_1	n_2	n_3	meses	días
-	13	9	22	669
14	2	7	23	669